Lector ing. dr. fiz. Corpodean Dumitriţa
dumitrita.moldovan@phys.utcluj.ro

Seminar 3 (DINAMICĂ)

Notă: Nu aveţi temă de studiu

1. La apariţia unui semnal, un tren de 500 tone începe frânarea mişcându-se faţă de semnal după legea:

$$x = 20t - t^2 - 105\ m.$$

Să se afle:

a) unde începe franarea;
b) timpul până la oprire si locul de oprire;
c) forţa de frânare.

Răspuns:

a) Pentru $t = 0$ $x(0) = -105\ m$

Distanţa este negativă după cum se vede mai sus astfel ca trenul începe franarea înaintea semnalului cu 105 m.

b) $$\text{v} = \frac{dx}{dt} = 20 - 2t = 0 \Rightarrow t_0 = 10\ s$$

$$x(10) = 200 - 100 - 105 = -5\ m$$

$$a = \frac{\text{dv}}{\text{dt}} = \frac{d(20-2t)}{dt} = -2\ m/s^2$$

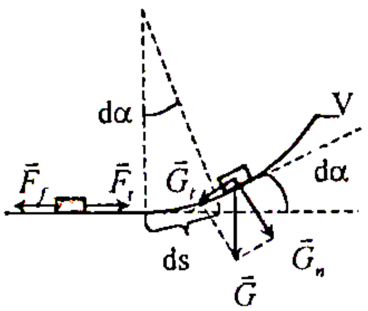
$$F = m \cdot a = -5 \cdot 10^5 \cdot 2 = -10^6\ N = -10^3\ kN$$

2. Un autovehicul de 10 tone merge pe orizontală cu viteza de 72 km/h, apoi urcă o pantă lungă de 1 km cu o înclinare variabilă $\alpha = \frac{x(km)}{10}$ cu aceaşi viteză. Ştiind că pe orizontală motorul dezvoltă 100kW.

Se cere:

a) Să se arate că panta este un cerc şi să se afle raza cercului;
b) Forţa de frecare pe orizontală;
c) Cum variază puterea cu distanţa x parcursă pe pantă şi puterea în vârful pantei;
d) Lucru menamic efectuat pentru urcatul pantei.

Răspuns:



a) $$\alpha = \frac{x}{10}\ d\alpha = \frac{dx}{r} \Rightarrow d\alpha = \frac{dx}{10} \Rightarrow r = 10\ km$$

b) $$F_t - F_f = m \cdot a \Rightarrow a = 0$$

$$F_t = F_f = \frac{P_0}{v} = \frac{10^5 W}{20\ m/s} = 5 \cdot 10^3\ N \quad 1W = 1\frac{Joule}{secunde} = kg \cdot m^2/s^3$$

c) $$P(x) = (F_f - G_t)v = \left(\frac{P_0}{v} + mgsin\alpha\right)v = P_0 + mgsin\frac{x}{10}$$

$$P_{in\ varful\ pantei} = P(1) = 10^5 + 10^4 \cdot 10 \cdot 20 \cdot sin\frac{1}{10} = 10^5 + 10^6 \cdot 2 \cdot sin0{,}1 = 103.491\ W$$

d) $$dW = Fdx = Frd\alpha = (F_f + mgsin\alpha)rd\alpha = (5 \cdot 10^3 + 10^4 \cdot 10 \cdot sin\alpha)10^4 d\alpha$$

$$W = \int_0^x Fdx = \int_0^{1/10} 10^7(5 + 100sin\alpha)d\alpha = 10^7(5\alpha - 100cos\alpha)|_0^{0{,}1} \cong 5 \cdot 10^6 Joule$$

3. O ambarcaţiune (4+1 vâsle) având masa de $m = 400\ kg$ are viteza $\text{v}_0 = 18\ km/h$ când încetează vâslitul. Cum se modifică în timp viteza bărcii, dacă rezistenţa la înaintare este proporţională cu pătratul vitezei, $R = -k \cdot \text{v}^2 = -20 \cdot \text{v}^2$. Care este legea orară de mişcare? După cât timp se va opri barca ş ice spaţiu va parcurge până la oprire. Cum scade viteza cu spaţiul parcurs.

Răspuns:

$$m\frac{dv}{dt} = -kv^2$$
$$\int_{v_0}^{v}\frac{1}{v^2} = -\int_0^t \frac{k}{m}dt \Longrightarrow$$
$$\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} = -\frac{k}{m}\cdot t$$
$$v = \frac{v_0}{1+\frac{k}{m}v_0 t} = \frac{5}{1+\frac{t}{4}} = \frac{20}{4+t} \quad (1)$$
$$s = \int_0^t \frac{v_0}{1+\frac{k}{m}v_0 t}dt = \frac{m}{k}\cdot \ln\left(1+\frac{k}{m}v_0 t\right)\Big|_0^t = \frac{m}{k}\cdot\ln\left(1+\frac{k}{m}v_0 t\right) = 20\ln\left(1+\frac{t}{4}\right) \quad (2)$$

Dacă eliminăm timpul din relaţiile (1) şi (2) atunci ne rezultă:

$$v = \frac{v_0}{e^{\frac{k}{m}s}} = v_0\cdot e^{-\frac{k}{m}s} = 5\cdot e^{-\frac{1}{20}s}\ (m/s)$$

4. O paraşută (cu paraşutist) cântăreşte $m = 100\ kg$ şi este lansată dintr-un turn de paraşutism complet deschisă. Ştiind că ea întâmpină o rezistenţă proporţională cu viteza, $R = k\cdot v$ unde $k = 500\ Ns/m$. Să se afle expersia vitezei şi viteza limită.

Răspuns:

Să putem rezolva problema trebuie să ne gândim ce forţe acţionează asupra paraşutei astfel că avem din legea a II-a a lui Newton: $F = m\cdot a$, apoi ştim că $G = m\cdot g$, $R = k\cdot v$ forţa de rezistenţă data în datele problemei, care are sens contrar lui G datorită faptului că acţionează opus G. Ecuaţia forţelor este:

$$F = G - R$$
$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv$$
$$\int_0^v \frac{1}{g-\frac{k}{m}v} = \int_0^t dt$$

Ştim că $\ln(u)' = \frac{1}{u}\cdot u'$ astfel că putem rezolva integral din partea stanga. Stiind că integrala este inversa derivatei şi reciproc atunci:

$$\ln\left(g-\frac{k}{m}v\right)' = \frac{1}{g-\frac{k}{m}v}\cdot\left(g-\frac{k}{m}v\right)'$$
$$-\frac{m}{k}\ln\left(g-\frac{k}{m}v\right)\Big|_0^v = t$$
$$\ln\left(1-\frac{k}{mg}v\right) = -\frac{k}{m}t$$
$$v(t) = \frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$
$$v(t) = \frac{100\cdot 10}{500}\left(1-e^{-\frac{500}{100}t}\right) = 2(1-e^{-5t})\ m/s$$

pentru $t\to\infty \Longrightarrow v_{lim} = 2\frac{m}{s} = 7.2\ km/h$

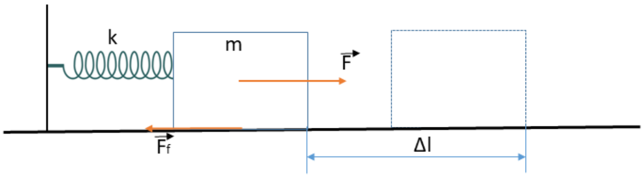
viteza limită corespunde echilibrului dinamic:

$$G = R \Rightarrow m\cdot g = k\cdot v_{lim} \Rightarrow v_{lim} = \frac{m\cdot g}{k} = \frac{100\cdot 10}{500} = 2m/s$$

5. Un corp de masa $m = 5\ kg$ aflat pe o suprafaţă orizontală este împins prin destinderea unui arc elicoidal, de contantă $k = 200\ N/m$, care a fost comprimat la jumătate din lungimea sa $l = 20\ cm$. Să se afle:
   a) Lucrul mecanic la destindere;
   b) Cât trebuie să fie coeficientul de frecare pentru ca în urma destinderii arcul să rămâna netensionat.

Lector ing. dr. fiz. Corpodean Dumitriţa
dumitrita.moldovan@phys.utcluj.ro

Răspuns:



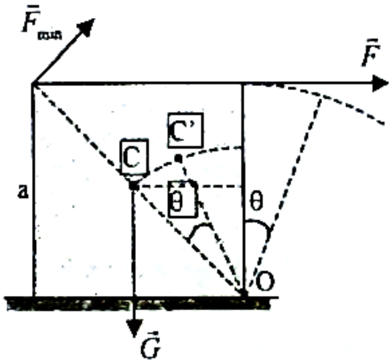
a) $F = -k \cdot x, \Delta l = \frac{l}{2} = \frac{10}{2} = 10\ cm$

$dW = Fdx \quad W = -\int_{\Delta l}^{0} k \cdot x = -\frac{k}{2} x^2 |_{\Delta l}^{0} = \frac{200}{2} 0.1^2 = 1\ J$

b) $\Delta E = L_f \Leftrightarrow E_f - E_i = L_f \Rightarrow 0 - k \cdot \frac{\Delta l^2}{2} = -\mu \cdot m \cdot g \cdot \Delta l$

$$\mu = \frac{k\Delta l}{2mg} = \frac{200 \cdot 0.1}{2 \cdot 5 \cdot 10} = 0.2$$

6. Un cub de beton cu muchia $a = 0.8\ m$ şi densitatea de 2500 kg/m^2 trebuie răsturnat în jurul unei muchii. Se cere:
   a) punctul de aplicaţie, direcţia şi valoarea forţei minime necesare răsturnării;
   b) expresia forţei orizontale necesară răsturnării, dacă aceasta este aplicată pe muchia de sus, în funcţie de unghiul de rotaţie;
   c) lucrul mecanic efectuat pentru răsturnare.
   Răspuns:



a) Forţa minimă trebuie aplicată la capătul diagonalei unei feţe, perpendicular pe aceasta; valoarea acesteia se află din condiţia de echilibru de rotaţie, adică momentul forţelor de răsturnare este egal cu momentul forţelor de stabilitate:

$$M_{F_m} = M_G \Longrightarrow F_m \cdot a\sqrt{2} = G\frac{a}{2}$$

$$F_m = \frac{m \cdot g}{2\sqrt{2}} = \frac{V\rho g}{2\sqrt{2}} = \frac{a^3 \rho g}{2\sqrt{2}}$$

$$F_m = \frac{0.8^3 \cdot 2500 \cdot 10}{2\sqrt{2}} = 4525\ N$$

b) $F \cdot a \cdot \cos\theta = m \cdot g \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) \Longrightarrow F = \frac{m \cdot g}{2}(1 - \tan\theta) = \frac{a^3 \cdot \rho \cdot g}{2}(1 - \tan\theta) = 6.4 \cdot 10^3 (1 - \tan\theta)$

c) $L = \int_0^{\frac{\pi}{4}} M_F d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} M_G d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} m \cdot g \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) d\theta = m \cdot g \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = m \cdot g \cdot a\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{a^4 \cdot g \cdot \rho}{2}\left(\sqrt{2} - 1\right) = 2.12 \cdot 10^3 J$